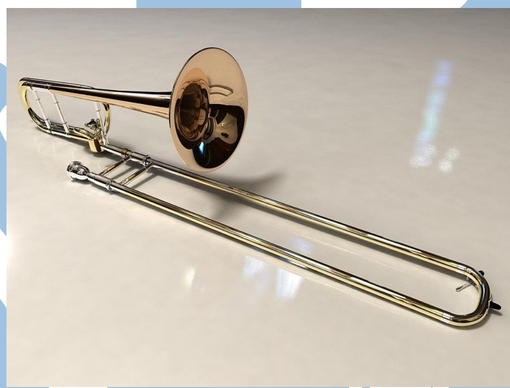
Séquence : 04

Document : TD02
Lycée Dorian
Renaud Costadoat
Françoise Puig

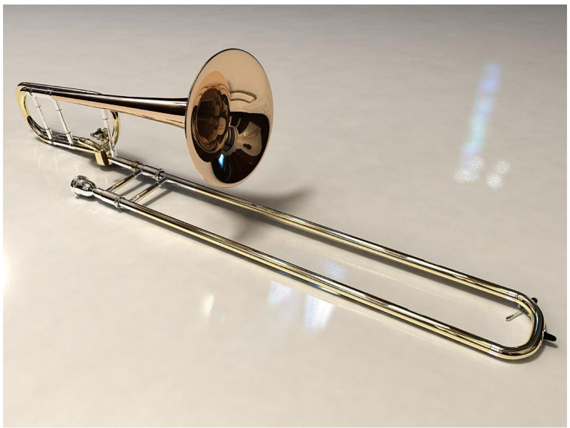
Avec Correction

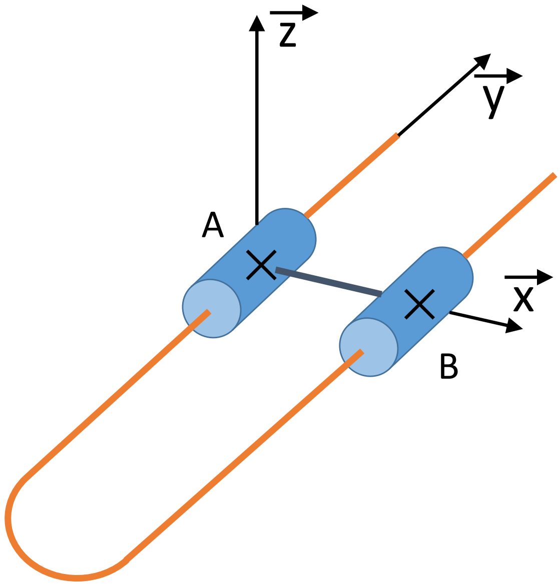
Liaisons équivalentes



Référence	S04 - TD02
Compétences	B2-12: Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques. B2-13: Proposer un modèle cinématique paramétré à partir d'un système réel, d'une maquette numérique ou d'u B2-17: Simplifier un modèle de mécanisme. B2-18: Modifier un modèle pour le rendre isostatique. C1-04: Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. C2-05: Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère. C2-06: Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
Description	Equivalence des liaisons en parallèle et en série
Système	Robot de soudage, Trombone à coulisse

1 Trombone à coulisse





Le **trombone** est un instrument de musique à vent et à embouchure de la famille des cuivres clairs. Le terme désigne implicitement le **trombone à coulisse** caractérisé par l'utilisation d'une **coulisse télescopique**, mais il existe également des modèles de trombone à pistons. Le trombone à coulisse est l'un des rares instruments à vent dont la maîtrise ne nécessite pas l'utilisation individuelle des doigts.

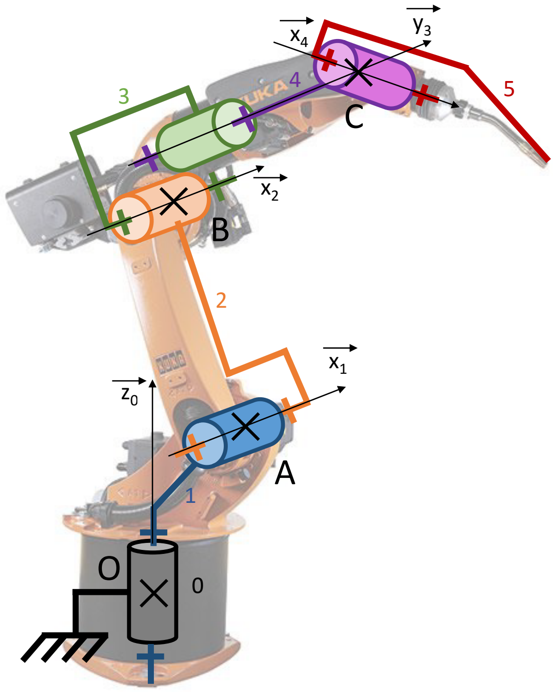
Le trombone est constitué d'un corps (0) et d'une coulisse (1). Le vecteur $\overrightarrow{AB} = e.\overrightarrow{x}$.

Question 1 : Écrire le graphe des liaisons du trombone à coulisse.

Question 2 : Écrire les torseurs cinématiques de chacune des liaisons et les déplacer au même point.

Question 3 : En déduire la liaison équivalente entre le **corps** du trombone et la **coulisse**.

2 Robot soudeur



Un **robot industriel** est un système polyariticulé, à l'image d'un bras humain, composé de plusieurs degrés de liberté, permettant de déplacer et d'orienter un outil (organe effecteur) dans un espace de travail donné.

Il existe :

— des robots de peinture ou de soudure largement utilisés dans l'industrie automobile,

— des robots de montage de dimension souvent plus réduite,

— des robots mobiles destinés à l'inspection souvent associés à de l'intelligence artificielle et capables, dans certains cas, de prendre en compte l'environnement.

Données :

— $\overrightarrow{OA} = a.\overrightarrow{y_1} + b.\overrightarrow{z_1}$,

— $\overrightarrow{AB} = c.\overrightarrow{y_2}$,

— $\overrightarrow{BC} = d.\overrightarrow{y_3} + e.\overrightarrow{z_3}$.

Question 1 : Écrire le graphe des liaisons du robot soudeur.

Question 2 : Écrire les torseurs cinématiques des liaisons $\{V_{1/0}\}$ et $\{V_{2/1}\}$ et les déplacer au point O.

Question 3 : En déduire le torseur et le nombre de mobilité de la liaison équivalente entre la pièce **2** et le **bâti**.

Question 4 : Écrire le torseur cinématique de la liaison $\{V_{3/2}\}$ et le déplacer au point O.

Question 5 : En déduire le torseur et le nombre de mobilité de la liaison équivalente entre la pièce **3** et le **bâti**.

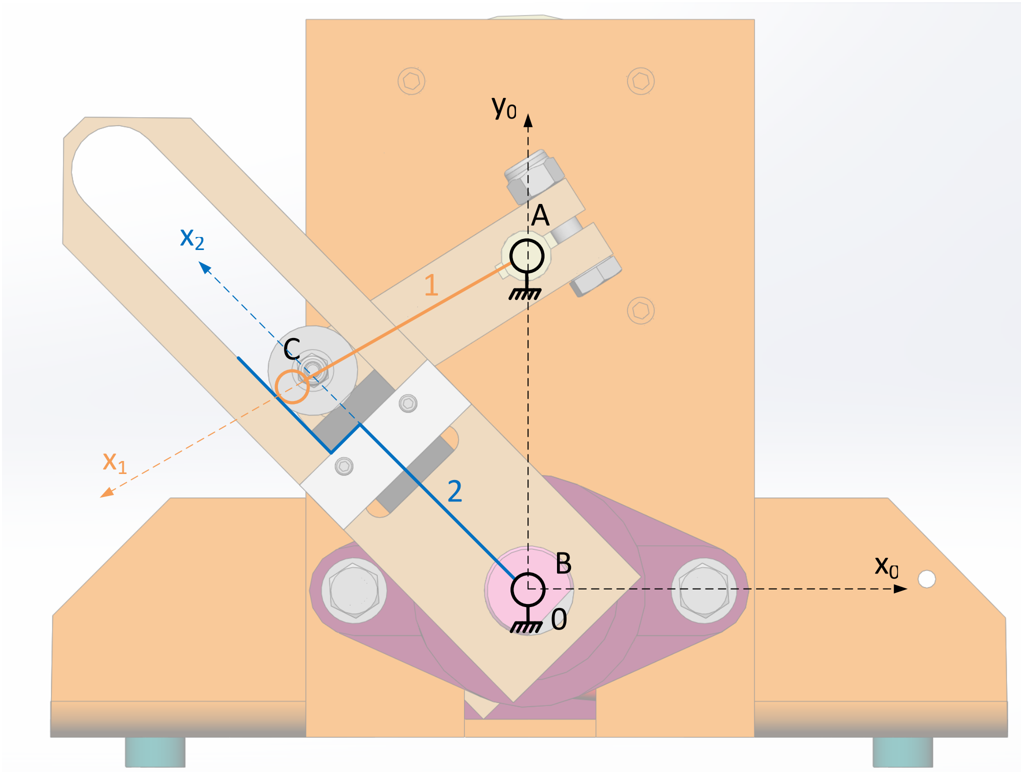
Question 6 : Écrire le torseur cinématique de la liaison $\{V_{4/3}\}$ et le déplacer au point O.

Question 7 : En déduire le torseur et le nombre de mobilité de la liaison équivalente entre la pièce **4** et le **bâti**.

Question 8 : Conclure quant à l'intérêt d'ajouter des liaisons à une mobilité sur un bras robotisé.

3 Barrière sympact

La cinématique de la transformation du mouvement de la barrière Sympact est présentée sur le schéma suivant.



On donne les éléments géométriques suivants :

- $\overrightarrow{AB} = -l_1.\overrightarrow{y_0}$,
- $\overrightarrow{AC} = l_2.\overrightarrow{x_1}$,
- $\theta_1 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$,
- $\theta_2 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2})$.

Question 1 : Déterminer les torseurs des liaisons suivantes $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/0}\}$ et $\{V_{2/1}\}$.

Question 2 : Déplacer ces torseurs au point A, dans le repère R_0.

Question 3 : Déterminer la liaison équivalente $\{Ve_{2/0}\}$.

Question 4 : Déterminer le nombre de mobilités du système.

4 Correction

4.1 Trombone à coulisse

Question 1 : Il y a deux liaisons entre le corps **0** et la coulisse **1** :
- Pivot-glissant $(A,\overrightarrow{y})$,
- Pivot-glissant $(B,\overrightarrow{y})$.

Question 2 :

$$\left\{V'_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \omega'_{10} & V'_{A,10} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_A , \left\{V''_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \omega''_{10} & V''_{B,10} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_B$$

$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \Omega_{1/0} = \begin{array}{c} 0 \\ V''_{B,10} \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} e \\ 0 \\ 0 \end{array} \wedge \begin{array}{c} 0 \\ \omega''_{10} \\ 0 \end{array}$$

$$\left\{V''_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \omega''_{10} & V''_{B,10} \\ 0 & e.\omega''_{10} \end{array}\right\}_A$$

$$\left\{Ve_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \omega'_{10} & V'_{A,10} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \omega''_{10} & V''_{B,10} \\ 0 & e.\omega''_{10} \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & V_{A,10} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_A$$

Question 3 : La liaison équivalente est une glissière.

4.2 Robot soudeur

Question 1 : Les liaisons sont les suivantes :
1. Pivot entre 0 et 1 $(O,\overrightarrow{z_0})$,
2. Pivot entre 1 et 2 $(A,\overrightarrow{x_1})$,
3. Pivot entre 2 et 3 $(B,\overrightarrow{x_2})$,
4. Pivot entre 3 et 4 $(C,\overrightarrow{y_3})$,
5. Pivot entre 4 et 5 $(C,\overrightarrow{x_4})$.

Question 2 :

$$\left\{V_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{array}\right\}_{(O,R_0 \text{ ou } R_1)} , \left\{V_{2/1}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \omega_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(A,R_1)} .$$

$$\overrightarrow{V_{O\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{OA} \wedge \Omega_{2/1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{V_{2/1}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \omega_{21} & 0 \\ 0 & b.\omega_{21} \\ 0 & -a.\omega_{21} \end{array}\right\}_{(O,R_1)}$$

Question 3 :

$$\left\{V_{2/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \omega_{21} & 0 \\ 0 & b.\omega_{21} \\ \omega_{10} & -a.\omega_{21} \end{array}\right\}_{(O,R_1)}.$$

Il y a deux mobilités : ω_{10} et ω_{21}.

Question 4 :

$$\left\{V_{3/2}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \omega_{32} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(B,R_1)} = \left\{\begin{array}{cc} \omega_{32} & 0 \\ 0 & (b + c.\sin\theta_{21}).\omega_{32} \\ 0 & -(a + c.\cos\theta_{21}).\omega_{32} \end{array}\right\}_{(O,R_1)}$$

Question 5 :

$$\left\{V_{3/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \omega_{32} + \omega_{21} & 0 \\ 0 & b.\omega_{21} + (b + c.\sin\theta_{21}).\omega_{32} \\ \omega_{10} & -a.\omega_{21} - (a + c.\cos\theta_{21}).\omega_{32} \end{array}\right\}_{(O,R_1)}$$

Il y a trois mobilités : ω_{10}, ω_{21} et ω_{32}.

Question 6 :

$$\left\{V_{4/3}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \omega_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(C,R_3)}$$

$\overrightarrow{OC} = a.\overrightarrow{y_1}+b.\overrightarrow{z_1}+c.\overrightarrow{y_2}+d.\overrightarrow{y_3}+e.\overrightarrow{z_3} = a.\overrightarrow{y_1}+b.\overrightarrow{z_1}+c.\overrightarrow{y_2}+(d.\cos\theta_{32}-e.\sin\theta_{32}).\overrightarrow{y_2}+(d.\sin\theta_{32}+e.\cos\theta_{32}).\overrightarrow{z_2}$

$\overrightarrow{OC} = [a + c.\cos\theta_{21} + d.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) - e.\sin(\theta_{32} + \theta_{21})]\,.\overrightarrow{y_1}$
$+ [b + c.\sin\theta_{21} + d.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) + e.\cos(\theta_{32} + \theta_{21})]\,.\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{\Omega_{4/3}} = \omega_{43}.\overrightarrow{y_3} = \omega_{43}.\left[\cos(\theta_{32} + \theta_{21}).\overrightarrow{y_1} + \sin(\theta_{32} + \theta_{21}).\overrightarrow{z_1}\right]$

$\overrightarrow{V_{O\in 4/3}} = [[a + c.\cos\theta_{21} + d.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) - e.\sin(\theta_{32} + \theta_{21})]\,.\sin(\theta_{32} + \theta_{21})$
$- [b + c.\sin\theta_{21} + d.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) + e.\cos(\theta_{32} + \theta_{21})]\,.\cos(\theta_{32} + \theta_{21})]\,.\omega_{43}.\overrightarrow{x_1}$

En simplifiant, grâce aux formules trigonométriques, on obtient : $\overrightarrow{V_{O\in 4/3}} = [a.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) - b.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + c.s$

Ce résultat aurait pu être trouvé directement en faisant le maximum de calculs dans le repère R_3.

$\overrightarrow{V_{O\in 4/3}} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/3}}$

$\overrightarrow{V_{O\in 4/3}} = (-a.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) + b.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) - c.\sin(\theta_{32}) + e).\overrightarrow{z_3} \wedge \omega_{4/3}.\overrightarrow{y_3}$

$\overrightarrow{V_{O\in 4/3}} = (a.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) - b.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + c.\sin(\theta_{32}) - e).\omega_{4/3}.\overrightarrow{x_3}$, avec $\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_1}$,donc :

$\overrightarrow{V_{O\in 4/3}} = (a.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) - b.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + c.\sin(\theta_{32}) - e).\omega_{4/3}.\overrightarrow{x_1}$.

On retrouve bien le résultat précédent.

Question 7 :

$\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = (\omega_{32} + \omega_{21}).\overrightarrow{x_1} + \omega_{10}.\overrightarrow{z_1} + \omega_{43}.\left[\cos(\theta_{32} + \theta_{21}).\overrightarrow{y_1} + \sin(\theta_{32} + \theta_{21}).\overrightarrow{z_1}\right]$

$\overrightarrow{V_{O\in 4/0}} = [[a + c.\cos\theta_{21} + d.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) - e.\sin(\theta_{32} + \theta_{21})]\,.\sin(\theta_{32} + \theta_{21})$
$- [b + c.\sin\theta_{21} + d.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) + e.\cos(\theta_{32} + \theta_{21})]\,.\cos(\theta_{32} + \theta_{21})]\,.\omega_{43}.\overrightarrow{x_1}$
$+(b.\omega_{21} + (b + c.\sin\theta_{21}).\omega_{32}).\overrightarrow{y_1} - (a.\omega_{21} + (a + c.\cos\theta_{21}).\omega_{32}).\overrightarrow{z_1}$

$$\left\{V_{4/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{4/0}} \\ \overrightarrow{V_{O\in 4/0}}\end{array}\right\}_{(O,R_1)}$$

. Il y a quatre mobilités : ω_{10}, ω_{21} , ω_{32} et ω_{43}.

Question 9 : A chaque liaison ajoutée une mobilité (une équation indépendante) est ajoutée. Celle-ci apparaît car les liaisons ajoutées sont des liaisons pivot (1ddl). Le système doit alors avoir 5 mobilités au total.

4.3 Barrière Sympact

Question 1 :

$$\left\{V_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{array}\right\}_A , \left\{V_{2/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{20} & 0 \end{array}\right\}_B , \left\{V_{2/1}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{array}\right\}_{C,R_2} .$$

Question 2 :

$$\left\{V_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{array}\right\}_A , \left\{V_{2/0}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & -l_1.\omega_{20} \\ 0 & 0 \\ \omega_{20} & 0 \end{array}\right\}_A .$$

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{C\in 2/1}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \left(\begin{array}{c} V_{x21}.\cos(\theta_2) \\ V_{x21}.\sin(\theta_2) \\ V_{z21} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} l_2.\cos(\theta_1) \\ l_2.\sin(\theta_1) \\ 0 \end{array}\right) \wedge \left(\begin{array}{c} \omega_{x21}.\cos(\theta_2) - \omega_{y21}.\sin(\theta_2) \\ \omega_{x21}.\sin(\theta_2) + \omega_{y21}.\cos(\theta_2) \\ \omega_{z21} \end{array}\right)$$

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \left(\begin{array}{c} V_{x21}.\cos(\theta_2) + l_2.\sin(\theta_1).\omega_{z21} \\ V_{x21}.\sin(\theta_2) - l_2.\cos(\theta_1).\omega_{z21} \\ V_{z21} + l_2.\cos(\theta_1).\left(\omega_{x21}.\sin(\theta_2) + \omega_{y21}.\cos(\theta_2)\right) - l_2.\sin(\theta_1).\left(\omega_{x21}.\cos(\theta_2) - \omega_{y21}.\sin(\theta_2)\right) \end{array}\right).$$

Question 3 :

$$\left\{Ve_{2/0}\right\} = \left\{V_{2/1}\right\} + \left\{V_{1/0}\right\} = \left\{V_{2/0}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega e_{x20} = \omega_{x21}.\cos(\theta_2) - \omega_{y21}.\sin(\theta_2) + 0 = 0 \\ \omega e_{y20} = \omega_{x21}.\sin(\theta_2) + \omega_{y21}.\cos(\theta_2) + 0 = 0 \\ \omega e_{z20} = \omega_{z21} + \omega_{10} = \omega_{20} \\ Ve_{x20} = V_{x21}.\cos(\theta_2) + l_2.\sin(\theta_1).\omega_{z21} + 0 = -l_1.\omega_{20} \\ Ve_{y20} = V_{x21}.\sin(\theta_2) - l_2.\cos(\theta_1).\omega_{z21} + 0 = 0 \\ Ve_{z20} = V_{z21} + l_2.\cos(\theta_1).\left(\omega_{x21}.\sin(\theta_2) + \omega_{y21}.\cos(\theta_2)\right) - l_2.\sin(\theta_1).\left(\omega_{x21}.\cos(\theta_2) - \omega_{y21}.\sin(\theta_2)\right) + 0 = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\omega_{x21} = \omega_{y21} = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega e_{x20} = 0 \\ \omega e_{y20} = 0 \\ \omega e_{z20} = \omega_{z21} + \omega_{10} = \omega_{20} \\ Ve_{x20} = V_{x21}.\cos(\theta_2) + l_2.\sin(\theta_1).\omega_{z21} + 0 = -l_1.\omega_{20} \\ Ve_{y20} = V_{x21}.\sin(\theta_2) - l_2.\cos(\theta_1).\omega_{z21} + 0 = 0 \\ Ve_{z20} = 0 \end{array}\right.$$

Question 4 :

$$\begin{cases} \omega_{x21}.\cos(\theta_2) - \omega_{y21}.\sin(\theta_2) + 0 = 0 \\ \omega_{x21}.\sin(\theta_2) + \omega_{y21}.\cos(\theta_2) + 0 = 0 \\ \omega_{z21} + \omega_{10} = \omega_{20} \\ V_{x21}.\cos(\theta_2) + l_2.\sin(\theta_1).\omega_{z21} + 0 = -l_1.\omega_{20} \\ V_{x21}.\sin(\theta_2) - l_2.\cos(\theta_1).\omega_{z21} + 0 = 0 \\ V_{z21} + l_2.\cos(\theta_1).\left(\omega_{x21}.\sin(\theta_2) + \omega_{y21}.\cos(\theta_2)\right) - l_2.\sin(\theta_1).\left(\omega_{x21}.\cos(\theta_2) - \omega_{y21}.\sin(\theta_2)\right) + 0 = 0 \end{cases}$$

Étude du système :

— 7 inconnues cinématiques : ω_{10}, ω_{20}, ω_{x21}, ω_{y21},ω_{z21}, V_{x21} et V_{z21},

— 6 équations indépendantes.

On en déduit : $m = I_C - Rg(E) = 4 - 3 = 1$, le système possède 1 mobilité.

De plus, on remarque aussi dans ce cas que : $h = E - Rg(E) = 6 - 6 = 0$, le modèles est isostatique.